



TITLE:

乱流における粘性、拡散、散逸 (流れの不安定性と乱流)

AUTHOR(S):

桑原, 真二

CITATION:

桑原, 真二. 乱流における粘性、拡散、散逸 (流れの不安定性と乱流). 数理解析研究所講究録 1980, 390: 111-129

ISSUE DATE:

1980-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104938>

RIGHT:

乱流における粘性, 拡散, 散逸

名大 工学部 桑原 真二

§ 1. まえおき

乱流理論は流体の不規則な運動を対象とする。その中で統計流体力学 ρHD は, $N-S$ 方程式に支配される連続無限個の確率変数すなわち各点の流速に対する一般化された Liouville 方程式にもとづくもので, 数学的には最も厳格な構成をしている。しかし, その方程式はあまりに一般的でその一般性から多くの量を捨象し, 有意な量を引き出し, 更に乱流を直観的に把握する合理的な手法はまだ見出されていない。

乱流現象は多くのもっと単純な物理的過程の集合とみなすことができる。例えば, 乱流を互いに飛びかう大小さまざまな流体粒子の集りとみなすこともできれば, 渦の集りとみなすこともできる。このようなモデル化が可能ならば, 流体粒子のあるいは渦の力学を流体力学的に論じ, 更にそれらの力学と確率とを結びつけることによって, 今までのもの

と別種の $\rho H D$ が建設できるとある。すなわち乱流の記述法 (運動学) の違いにより、2 種々の $\rho H D$ が存在することになる。

乱流を “流体粒子”, “渦” 等の集りとみなす各種のモデル化が可能るとき, 個々の粒子, 渦を特徴づけるスケール λ , 速度 v があり, したがってその運動を特徴づけるレイノルズ数:

$$R_\lambda = \frac{v\lambda}{\nu} \quad \nu: \text{動粘性率} \quad (1.1)$$

が存在する。この論文では乱流の大きいスケールの運動を扱う

$$R_\lambda \gg 1 \quad (1.2)$$

を考える。そのような運動では近似的に完全流体としてとりあつかうことができる。

ここでは “渦糸モデル” を採用するが, まず “鉛砲玉モデル” すなわちとびかう流体粒子の集りとしてのモデルが不適切なことを論ずる。

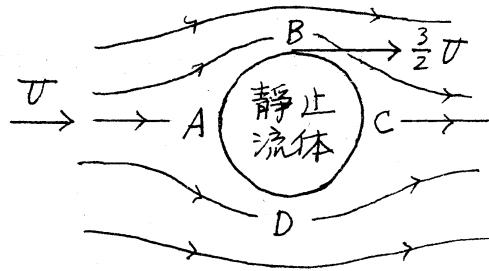
流体の塊が何らかの原因で流体中に放出されたとする。流体の塊を球形とみなし, 塊に静止した系から見ると止った流体球をすまして一様流で近似できるとある (オ 1 図)。ベルヌーイの定理から圧力は A 及び C で最大値 p_0 :

$$p_A = p_C = p_0 \quad (1.3)$$

ととり, B に向って減少して

B で (D で)

$$p_B (= p_D) = p_0 - \frac{1}{2} \rho \left(\frac{3}{2} U \right)^2 \quad (1.4)$$



となる。そこで A, C で環の 才 1 図 鉄砲玉モデル
中心へ, B で外側へ向う運動が起され, 偏平回転楕円体に変
形するであろう。今, A において圧力勾配と

$$\partial p / \partial x \sim (p_A - p_B) / a \quad (1.5)$$

と評価し, 上に述べた状態を初期条件として Euler の方程式
によって A 点の運動を非常に粗く計算すれば

$$\left. \begin{aligned} u_A &\sim \frac{U^2}{a} t \\ x_A &\sim \frac{U^2}{2a} t^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

となる。これに基づいて球が半分の厚さの偏平楕円体に変
形するに要する時間は

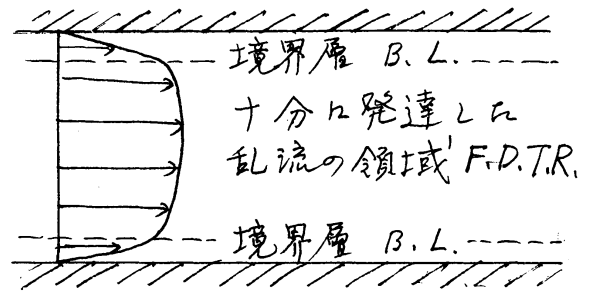
$$t \sim a / U \quad (x_A = a/2) \quad (1.7)$$

となる。そこで球が半径位移動する間に大まな変形をおこ
すことになる。鉄砲玉モデルは鉄砲玉が十分長い間, 形を
保ちつついることを仮定しているののでこのモデルを採用する
ことは不適切である。

§2. 粘性の乏しい運動の領域における乱流構造の渦系モデル

こゝでの考へ方は十分に一般性があるが、2次元 Poiseuille 乱流 (P. P. 乱流) について考へる。P. P. 乱流では平行な壁の附近の十分うすい境界層 B. L. で渦系が発生し、境界層外への渦系の放出が起ると考へる。B. L. の外側は十分に発達した乱流の領域 F. D. T. R. で、放出された渦系はもっと小さい渦系に変化し、最後は粘性によって消散する (才2図)。

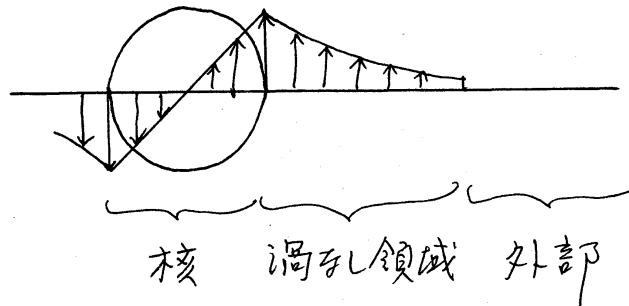
このモデルの基礎となる渦系の特徴を上げておこう。



- 1) 渦系は Galilei 変換に対して不変である (流線は座標系の運動により異なるパターンを示す。したがって Galilei 不変でない) \Rightarrow 渦系に個性がある。
- 2) $\text{div } \omega = \text{div } \text{rot } u = 0 \Rightarrow$ 渦系は流の場の中で発生、消滅しない。 \Rightarrow 渦系は自身でとじている (例: 渦環) か、端が壁に附着するか、無限遠まで続いているか以外にけありでない。
- 3) 渦系の構造: 渦の核 (渦度一定), 渦をしの領域, 外部 (相互作用の領域) と考へる (才3図)。

上の特徴にもとづいて
次のモデル化を行う。

- 1) 乱流は平均流と渦系(乱れ)の合成と考える。



- 2) 渦系は核 ($0 \leq r \leq \lambda$) と有限の渦系領域 ($\lambda \leq r \leq 1$) とからなり。 才3図 渦系の構造
- 3) 渦系は平均流を変形し、渦系自身及び他の渦系に対してひまのばし(ちいぬ)効果をもつ。
- 4) 渦系の曲りの効果は二次的に無視できる。
- 5) 乱流のエネルギーは渦系の平行移動及び内部エネルギーからなり、それらはおき平衡にあると仮定する。
- 6) 渦系はひまのばしと分裂によって小形化する。その際、循環(のれ)は保存し、系全体のエネルギーは保存する。

次に渦系の力学を考えよう。以下渦系の変遷を考えよう。平均的を意味で一連の代表的渦のみを考える。渦系の半径を λ , 渦度を ω とすれば断面積, 特徴的速さは $\sigma = \pi \lambda^2$, $v = \omega \lambda$ で表わされる。境界層でつくられる最大渦を σ_{max} , 最小の渦を σ_{min} をつけて表わす。最小の渦とは, 粘性効果の現れり前の渦で

$$v_a \lambda_a / v \sim 1 \quad (2.1)$$

と考える。渦糸の中の回転の速度分布は

$$v_\theta(r) = \left\{ \begin{array}{ll} \omega r & 0 \leq r \leq \lambda \\ \omega \lambda^2 / r & \lambda \leq r \leq 1 \end{array} \right\} \quad (2.2)$$

であるから、単位長さの渦糸（以下、単位渦糸と呼ぶ）のエネルギー σ は

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2} \rho \int_0^{2\pi} \int_0^1 v_\theta^2 r dr d\theta \\ &= C \rho \omega^2 \lambda^4 \quad C = \pi \left(\frac{1}{4} + \log \frac{1}{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

となる。

いまのばしに際し、 $\lambda \rightarrow \lambda'$ ($\sigma \rightarrow \sigma'$) の変化を、分裂は2等分裂 ($\lambda \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda$, $\sigma \rightarrow \frac{1}{2} \sigma$) のみを考える。いまのばしのばあい、Lagrange の渦定理が成立つから

$$\Gamma \equiv \omega \sigma = \omega' \sigma' (\equiv \Gamma') \quad (2.4)$$

しなから

$$\left. \begin{aligned} \omega' &= \left(\frac{\lambda}{\lambda'} \right)^2 \omega \\ v' &= \frac{\lambda}{\lambda'} v \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

となり、2等分裂においては

$$\Gamma = \omega \sigma = 2 \omega' \sigma' = \omega' \sigma (= 2 \Gamma')$$

しなから

$$\left. \begin{aligned} \omega' &= \omega \\ v' &= \omega' \lambda' = \frac{1}{\sqrt{2}} v \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

となる。

(2.5), (2.6) 及び (2.6) によって単位渦系のエネルギーの変化を計算すれば、それぞれ

$$\left. \begin{array}{ll} \sigma' = \sigma & \text{ひまのばし} \\ \sigma' = \frac{1}{4}\sigma & \text{2等分裂} \end{array} \right\} \quad (2.7)$$

となり。実際、ひまのばしによって渦系は $\lambda \rightarrow \lambda'$ の変化に対して長さ 1 は $(\lambda/\lambda')^2$ に増加し、2等分裂では渦系は2本になるから、渦系系全体に対してエネルギーは

$$\left. \begin{array}{ll} \sigma \rightarrow (\lambda/\lambda')^2 \sigma' = (\lambda/\lambda')^2 \sigma & \text{ひまのばし} \\ \sigma \rightarrow \sigma' \times 2 = \frac{1}{2}\sigma & \text{2等分裂} \end{array} \right\} \quad (2.8)$$

に変化する。すなわちひまのばし ($\lambda' < \lambda$) においては渦系系のエネルギーは増加し、分裂に際してはそのエネルギーは減少する。それ故、エネルギー保存の観点から、渦系の小形化はひまのばし²⁴の逆は不可能で、ひまのばしと分裂とをくりかえして行くと考えよのが合理的と思われる。

今、簡単のために2等分小形化すなわち2倍ひまのばしと2等分裂のみの過程を考えれば

$$\left. \begin{array}{ll} \sigma \rightarrow 2\sigma \rightarrow 4\sigma \rightarrow 8\sigma \rightarrow \dots & \text{2倍ひまのばし} \\ \sigma \rightarrow \frac{1}{2}\sigma \rightarrow \frac{1}{4}\sigma \rightarrow \frac{1}{8}\sigma \rightarrow \dots & \text{2等分裂} \end{array} \right\} \quad (2.9)$$

となる。そこで、2倍ひまのばし1, 2等分裂2の割合で2等分小形化が起れば、平均として乱れの全エネルギーは保

されり。

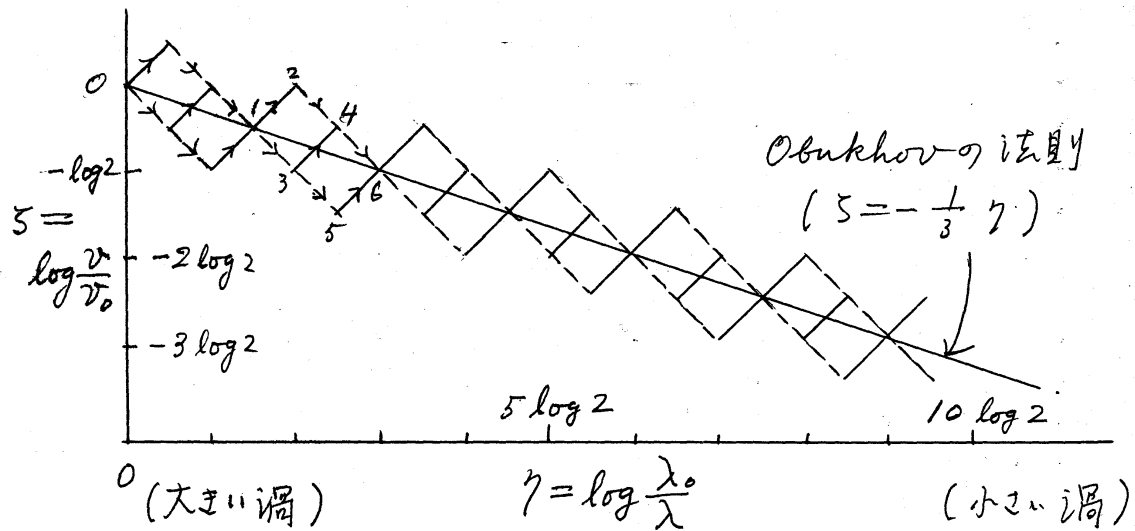
2倍の速さのばしと2等分分裂に際して^特徴的速度はそれぞれ

$$\left. \begin{array}{ll} v \rightarrow \sqrt{2} v & \text{2倍の速さのばし} \\ v \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} v & \text{2等分分裂} \end{array} \right\} \quad (2.10)$$

に変化する。上に述べた2倍の速さのばし1, 2等分分裂2の過程が終って、丁度エネルギーが保存された状態では

$$\left. \begin{array}{l} \lambda \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda = \lambda' \\ v \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} v = v' = \left(\frac{\lambda'}{\lambda} \right)^{1/3} v \end{array} \right\} \quad (2.11)$$

となり、2のあとの結果はObukhovの法則(Landau & Lifschitz, (32.1) p 121)と一致する。2等分小形化の(2.11)の過程は第4図に示してある。



第4図 2等分小形化の過程で平均的にObukhovの法則が
なりなつ (1 → 2 → 4 → 6, 1 → 3 → 4 → 6, 1 → 3 →
5 → 6, → : 2倍の速さのばし, → : 2等分分裂)

二等分小形化が定常的に起り、しかも各スケール ($\lambda = 0, \frac{1}{2} \log 2, \log 2, \frac{3}{2} \log 2, \dots$) における滞在時間が等しいとすれば、ある体積中にある各スケールの単位渦系の数は二等分小形化につれて、2倍、4倍、8倍になり、一方その体積は $1/2, 1/4, 1/8, \dots$ となるから、各スケールの渦系全体のしめる体積は同じになる。また、各スケールは λ 上にて等間隔に分布している。そこで λ 上の不連続の分布を連続的な分布とみなせば、渦に対するエネルギー分布は

$$\frac{1}{2} v(\lambda)^2 d\lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^{2/3} v_0 d \log \frac{\lambda}{\lambda_0} \quad (2.12)$$

となる。渦の集合を波の集と考えて λ と波数 k との関係 $1/\lambda \sim k$ とすれば k におけるエネルギー・スペクトル $E(k)$ は

$$E(k) dk \sim \frac{1}{2} v(\lambda)^2 d\lambda \sim k^{-2/3} d(\log k) \sim k^{-5/3} dk \quad (2.13)$$

すなわち、Kolmogoroff のスペクトルがえられる。

次に渦系が分裂する可能性を (2.2) の解の線形安定性によって論ずる。核の半径 λ が微小量変化しなとする：

$$\lambda = \lambda_0 + \sum_{l=2}^{\infty} \{ a_l e^{i l \theta} + c.c. \}, \quad \theta = l\theta_0 - \Omega_0 t \quad (2.14)$$

$l=1$ は単なる平行移動であり省く。 $l=2$ が二等分裂の初期を表わす。核内の流れは、変形しても渦度不変であるから

$$\nabla^2 \Psi = -\omega = \omega_0 = \text{const.}$$

したがってその解は

$$\Psi = \frac{1}{4} \omega_0 r^2 + \sum_{l=2}^{\infty} (b_l r^l e^{il\theta} + c.c.) \quad (2.15)$$

となる。渦巻きの領域は複素速度ポテンシャル $f(z)$ により

$$f(z) = \frac{1}{2} i a^2 \omega_0 \log z + \sum_{l=2}^{\infty} c_l' \frac{1}{z^l}$$

の如く表わされ、その実数部から

$$\Phi = -\frac{a^2 \omega_0}{2} \theta + \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{c_l}{r^l} e^{il\theta} + c.c. \right) \quad (2.16)$$

がえられる。

(2.15) により運動学の条件をつくらば

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} (r - \lambda - h(\theta, t)) \\ \equiv v_r - \frac{\partial h}{\partial t} + v_\theta \frac{\partial h}{r \partial \theta} = 0 \\ h(\theta, t) = \sum_{l=2}^{\infty} (a_l e^{il\theta} + c.c.) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\frac{D}{Dt}} \right\} \quad (2.17)$$

となる。(2.15) と (2.16) を (2.17) に代入して

$$\begin{aligned} b_l &= -\frac{1}{l \lambda^{l-1}} (\Omega_l + \frac{1}{2} \omega_0 l) a_l e^{-i \Omega_l t} \\ c_l &= i \frac{\lambda^{l+1}}{l} (\Omega_l + \frac{1}{2} \omega_0 l) a_l e^{-i \Omega_l t} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{b_l} \right\} \quad (2.18)$$

がえられる。更に $r = \lambda + h(\theta, t)$ における境界条件:

$$\phi|_{r=\lambda+h+0} = \phi|_{r=\lambda+h-0} \quad (2.19)$$

に以上の結果を代入すると、各モード ($l=2, 3, \dots$) に対して

$$\begin{aligned} \Omega_l &= -\frac{1}{2} \omega_0 l = -\frac{1}{2} \omega l \\ \Omega_l &= -\frac{1}{2} \omega_0 (l-1) = -\frac{1}{2} \omega (l-1) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\Omega_l} \right\} \quad (2.20)$$

がえられる。各モードの位相速度は Ω_l/l でありから、前者は角速度 $\frac{1}{2} \omega$ を持ち、後者はそれより

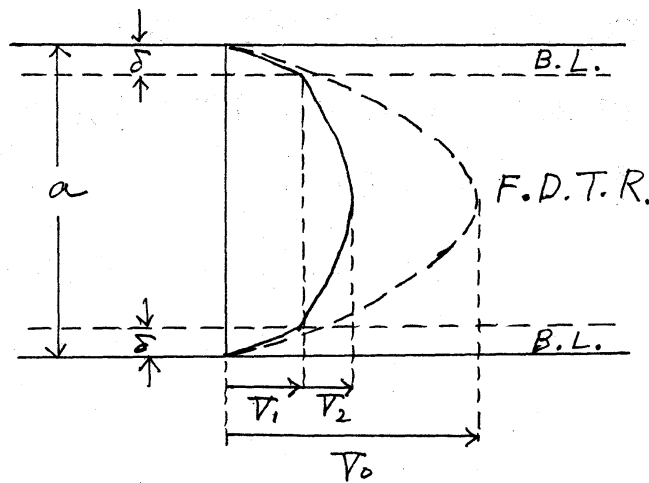
$\gamma(l-1)/l$ が γ の l 倍で変形が回転する 2π を表わしている。それ故線形安定性の理論からは中立安定の結果がえられ、もっとくわしい運動をしらべるためには非線形理論によらなければならない。

§3. 乱流における散逸極みの仮説

§2のべん乱流の渦糸モデルをP.P.乱流に適用する。

P.P.乱流において、境界層B.L.と十分発達した乱流の領域F.D.T.R.とは截然と分けられないが、ここでは一応分離できるものとする(第5図)。

そしてB.L.では分子粘性 μ が、F.D.T.R.では渦粘性 μ_t (一定)が大きい運動を支配していると仮定する。



こゝでの議論は物理

量の大きさの程度につい

てであつて、数因子は問

題にしない。層流のばあいの特徴的速度は

$$V_0 = \alpha a^2 / \mu \quad (3.1)$$

である。こゝで $\alpha = -d\bar{p}/dx$ は平均の圧力勾配である。

同様な考えから F. D. T. R. における特徴的速度は

$$V_2 = \alpha a^2 / \mu_t \quad (3.2)$$

である。渦粘性 ^{μ_t} は境界層から放出される大きな渦により特徴づけられるから、気体運動論と同じ考えから

$$\mu_t = \rho \delta V_1 \quad (3.3)$$

とおくことができる。更に $y = \delta$ または $a - \delta$ における接線応力の連続性から

$$\mu V_1 / \delta = \mu_t V_2 / a \quad (3.4)$$

をうる。ここで ρ, μ, a と α は与えられた量であり、 V_1, V_2, δ と μ_t は未知量である。そこで未知量を定めるのに (3.2) ~ (3.4) では条件が不足である。 V_1, V_2, μ_t を未知量 δ について表せば

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \alpha a \delta / \mu, & V_2 &= \alpha \nu / \delta^2 \\ \mu_t &= \alpha a \delta^2 / \nu & (\nu &= \mu / \rho) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

となる。

ここで x, y, z 方向 $1 \times a \times 1$ の直方体の中での散逸 \dot{E} は

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \mu (V_1 / \delta)^2 \delta + \mu_t (V_2 / a)^2 a \\ &= \alpha^2 a^2 \delta / \mu + \alpha \nu a^2 / \delta^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

で表わされる。ここで散逸極小の仮定を入れる。(3.6)

で δ は未知量であるが、これについて極小をとれば

$$d\dot{E}/d\delta = \alpha^2 a^2 / \mu - \alpha \nu a^2 / \delta^3 = 0$$

をうる。 $\xi = \tau$

$$\left. \begin{aligned} \delta &= (\mu\nu/\alpha)^{1/2}, \quad V_1 = a(\alpha^2\nu/\mu^2)^{1/3} \\ V_2 &= a(\alpha^2\nu/\mu^2)^{1/3} = V_1, \quad \mu_t = a(\alpha\mu^2/\nu)^{1/3} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

をうる。

層流に対応するレイノルズ数 Re と F.D.T.R. に対応するレイノルズ数 Re_2 を

$$\left. \begin{aligned} Re &= V_0 a / \nu = \alpha a^3 / \mu \nu \\ Re_2 &= V_2 a / \nu = Re^{2/3} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

で定義すると

$$\left. \begin{aligned} \delta/a &= Re^{-1/3} = Re_2^{-1/2} \\ V_1/V_0 &= V_2/V_0 = Re^{-1/3} = Re^{-1/2} \\ \mu_t/\mu &= Re^{+1/3} = Re_2^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

となる。

定常な P.P. 乱流においては F.D.T.R. における体積 $1 \times a' \times 1$ ($a' = a - 2\delta$) 中での散逸は B.L. からこの体積に供給される最大渦のエネルギーの割合である。最大の単位渦系のエネルギーは

$$U_0 = C\rho V_1^2 \delta^2 \sim \rho (\alpha a \delta^2 / \mu)^2 \quad (3.10)$$

である。 t_0 を最大渦系が B.L. 中に滞在している時間とすれば $1/\delta t_0$ は $(1 \times a' \times 1)$ 中の最大の単位渦系が単位時間に供給される個数である。そこで

$$\sigma_0 / \delta t_0 \sim \rho (\alpha a / \mu)^2 \delta^3 / t_0 \quad (3.11)$$

は $1 \times a' \times 1$ 中のエネルギーの増加率である。

$$(1 \times a' \times 1) \text{ 中の散逸} = (1 \times a' \times 1) \text{ への最大渦系の供給によるエネルギーの増加率} \quad (3.12)$$

であるから, (3.10) と (3.11) を等置して

$$t_0 \sim (\alpha \delta^3 / \nu \mu) \delta^2 / \nu = \delta^2 / \nu \quad (3.13)$$

となる。この時間 t_0 は厚さ δ の膜が成長する時間である。

§4. 乱流ブラウン運動における Einstein の関係式

乱流ブラウン運動とは乱流中に浮遊する粒子の不規則な運動をさすものとする。Einstein のブラウン運動の理論は次の考え方にもとづく。ブラウン粒子は熱運動によって不規則な運動をし、これらの粒子系 (分散相) は浸透圧 p_{osm} をもつ (van't Hoff の法則)。

$$p_{osm} = k_B T n_p \quad (4.1)$$

ここで k_B は Boltzmann 定数, T は温度, n_p は粒子の数密度である。半透膜でせまられた単純な流体と分散相との間の膜には浸透圧が働き、直接測定できる (図 6 図)。

ここで n_p に中子い勾配があったとすれば、巨視的な拡散による流れが生ずる (Fick の法則):

$$n_p \langle u \rangle = -D \text{grad } n_p \quad (4.2)$$

ここで $\langle u \rangle$ は粒子の平均速度, D は拡散係数である。(4.1) から, 温度

を一定とすれば n_p の勾配は p_{osm} の

勾配に比例する。Einstein は圧力勾

配のある分散相が粘性流体中に浸っていると考えて, 圧力勾

配と粘性による抵抗とがバウンスしているとした。圧力勾

配による分散相に働く体積力は

$$-\text{grad } p_{osm} \quad (4.3)$$

である。一方, 分散相が半径 a の球形粒子からなるとし

て, Stokes の抵抗法則を仮定すれば, 分散相の受ける平均の体積力は

$$6\pi\eta a n_p \langle u \rangle \quad (4.4)$$

となる。そこで (4.3) と (4.4) を等置して

$$-\text{grad } p_{osm} = -k_B T \text{grad } n_p = 6\pi\eta a n_p \langle u \rangle \quad (4.5)$$

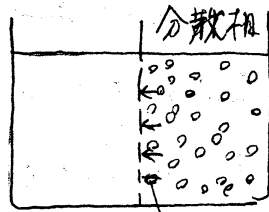
をうる。ここで, 最後の式に (4.2) を代入し $\text{grad } n_p$ の係数を比較すると

$$D = k_B T / (6\pi\eta a) \quad (4.6)$$

をうる。これが Einstein の関係式である。以上の議論に

おいて (4.2) 及び (4.4) が成立するたため

$$|\text{grad } n_p| / n_p = |\text{grad } p_{osm}| / p_{osm} \ll 1$$



浸透圧

第6図

$$a \ll \lambda \equiv \text{分子の平均自由行程} \quad \} \quad (4.7)$$

が仮定されている。

上の考えは殆どそのまま乱流ブラウン運動に適用できる。粒子は通さないが流体は自由に通過するカゴの中に粒子を入れて F.D. T.R. に浸してやれば、粒子のカゴへの衝突によってカゴには内側から外側に向う平均の力エウゲ子であるう

(オク図)。つまり乱流透過圧 p_{toss} が存在することになる。

粒子分散系は乱れと力学的、統計的平衡状態にあり、粒子の速度分布は正規分布：

$$f(u) = A e^{-\alpha u^2} \quad (4.8)$$

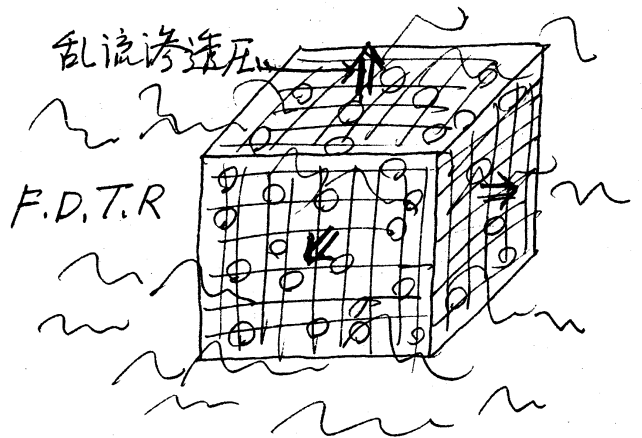
と仮定する。そこで

$$\left. \begin{aligned} n_p &= \int f(u) d^3u = A (\pi/\alpha)^{3/2} \\ \langle u^2 \rangle &= \int f(u) u^2 d^3u = \frac{3}{4} \frac{1}{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

しんがって

$$\begin{aligned} p_{\text{toss}} &= 2 \langle n_p u_x p_x \rangle \Big|_{u_x > 0} \\ &= \frac{1}{4} m A \pi^{1/2} / \alpha^{5/4} = \frac{1}{3} m \langle u^2 \rangle n_p \end{aligned} \quad (4.10)$$

が成立つ。これは (4.1) に対応する。(4.2), (4.4) に対



オク図 乱流透過圧

よして

$$n_p \langle u \rangle = -D_t \text{grad } n_p \quad (4.11)$$

$$-\text{grad } p_{\text{osm}} = -\frac{1}{3} m \langle u^2 \rangle \text{grad } n_p = 6\pi \mu_t a n_p \langle u \rangle \quad (4.12)$$

を仮定する。ここで D_t は乱流拡散係数, m はブラウン粒子の質量である。(4.11) と (4.12) と結合つけて $\text{grad } n_p$ の係数を

$$D_t = \frac{m \langle u^2 \rangle}{18\pi \mu_t a} \quad (4.13)$$

とする。これが乱流ブラウン運動に対する Einstein の関係式である。

P.P. 乱流において, y 方向の乱流拡散が起るとする。

そこで

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} = D_t \frac{\partial^2 n_p}{\partial y^2} \quad (4.14)$$

が成立つ。この基本解は

$$n_p(y, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D_t t}} e^{-\frac{y^2}{4D_t t}} \quad (4.15)$$

である。これから初期に $y=0$ にあった粒子の平均到達距離は

$$\langle y^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 n_p(y, t) dy = 2 D_t t \quad (4.16)$$

となるので

$$D_t = \langle y^2 \rangle / 2t \quad (4.17)$$

とする。

(4.7) に対応して, この理論の適用できる条件は

$$\left. \begin{aligned} |grad n_p|/n_p &= |grad p_{t00m}|/p_{t00m} \ll 1 \\ a \gg \lambda_0 &= \text{最大渦のスケール} \end{aligned} \right\} (4.18)$$

である。

P.P.乱流において乱流ブラウン粒子の実験を行うはあいを考える。 D_t は(4.17)により, μ_t はF.D.T.R.における平均速度分布の曲率から, $\langle u^2 \rangle$ はブラウン粒子の速度自乗平均であるからすべて観測可能な量であり,(4.13)は実験によって検証できるはずである。

§5. おまけ

この論文では乱流構造の渦系モデルを考察した。まず境界層によって発生した大きな渦系がひまのばしと分裂によって小形化する“渦系の力学”を論じ(§2), 2次元 Poiseuille 乱流を境界層と十分に発達した乱流の領域に分離して、渦系モデルを適用した(§3)。その際力学だけでは閉じる関係が与えられず“散逸極限の仮説”を導入した。一般にランダム系を粗視化するとき、決定論的法則(第1原理)だけでは不十分で、統計法則を必要とする。この仮説は統計法則の一種と考えられる。§4で Einstein のブラウン運動の理論を乱流ブラウン運動(乱流中に浮遊する粒子の不規則な運動)に適用した。Einstein の関係式で温度が現われる所に

ブラウン粒子の運動エネルギーの平均値が現れるが、粒子と
 乱れの力学的、統計的平衡を流体力学的に論ずることによっ
 て、これを乱れの性質におまかえるものと思われた。

参考文献:

- 1) A. Einstein : Ann. der Phys. 17 (1905) 549 (湯川他:
 アインシュタイン選集 I (1971) 219, 共立出版)
- 2) A. Einstein : Ann. der Phys. 19 (1906) 371 (湯川他:
 アインシュタイン選集 I (1971) 230, 共立出版)
- 3) 桑原真二: 統計流体力学 (流体力学の展望 I) 1976,
 流体力学懇話会
- 4) L. D. Landau & E. M. Lifschitz : Fluid
 Mechanics § 31 ~ § 38 (p116 ~ p144) 1959,
 Pergamon Press.